

Série 4 — Analyse Numérique

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soient $b \in \mathbb{R}^n$ et le système (S) : $Ax = b$.

Soient $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

1- Montrer que l'algorithme du gradient à pas constant α , pour la résolution de (S) converge (pour tout choix de $x^{(0)}$) si et seulement si : $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}$.

2- En déduire que si il existe $M > 0$ tel que $\|Ax\|_2 \leq M\|x\|_2, \forall x \in \mathbb{R}^n$, alors l'algorithme précédent converge si $\alpha \in]0, \frac{2}{M}[$.

3- Déterminer la valeur optimale α^* de α qui assure la convergence la plus rapide de l'algorithme précédent et vérifier que :

$$\rho(I - \alpha^* A) = \frac{\text{Cond}_2(A) - 1}{\text{Cond}_2(A) + 1}$$

Exercice 2

Soit (S) : $Ax = b$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1- On considère l'algorithme du gradient à pas constant α appliqué à (S).

1-a Pour quelles valeurs de α l'algorithme converge-t-il ?

1-b Déterminer la suite $(x^{(k)})$ générée par l'algorithme, lorsque $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ et $\alpha = \frac{1}{2}$.

2- Faire 3 itérations de l'algorithme du gradient à pas optimal pour la résolution de (S) avec $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

3- Résoudre (S) par la méthode du gradient conjugué.

Exercice 3

Soient $(g^{(k)})$, $(\omega^{(k)})$ et $(x^{(k)})$ les suites de vecteurs générées par l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution de $Ax = b$ (notations et hypothèses du cours).

On suppose que $g^{(i)} \neq 0; \forall i = 0, 1, \dots, k-1$.

1- Montrer que $\mathcal{V}(g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(k-1)}) = \mathcal{V}(\omega^{(0)}, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k-1)}) = \mathcal{V}(g^{(0)}, Ag^{(0)}, \dots, A^{k-1}g^{(0)}) \equiv E_k$. (où $\mathcal{V}(x^1, \dots, x^p)$ désigne l'espace vectoriel engendré par x^1, \dots, x^p).

2- Montrer que : $J(x^{(k)}) \leq J(x), \forall x \in x^{(0)} + E_k$, où $J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice ^{Inversible} non nécessairement symétrique

Adapter l'algorithme du gradient conjugué pour la résolution de : $Ax = b \iff A^T Ax = A^T b$
(on évitera le calcul explicite du produit $A^T A$ par un vecteur).